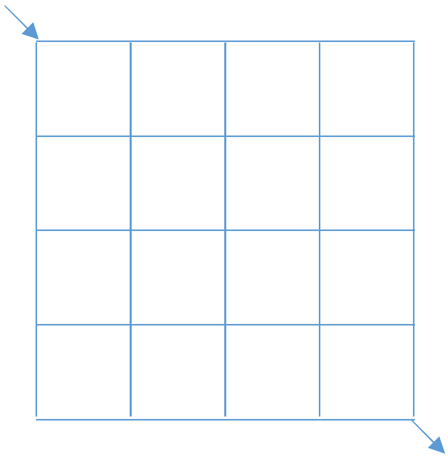
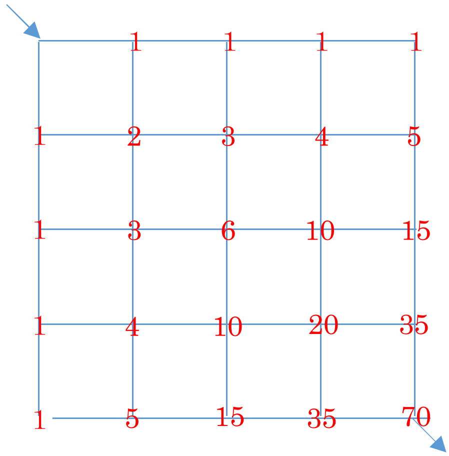
括弧の括り方が何通りあるかという問題の解答はカタラン数になります．この問題を考える準備として次の問題を考えます．

問題 A：白い棒と赤い棒がそれぞれ 4 本あります．全部で何通りの並べ方がありますか？



左図で左上の矢印（入口）から入って右下の矢印（出口）まで辿る道順は何通りですか？但し，横は右方向，縦は下方向だけ移動できることとします．

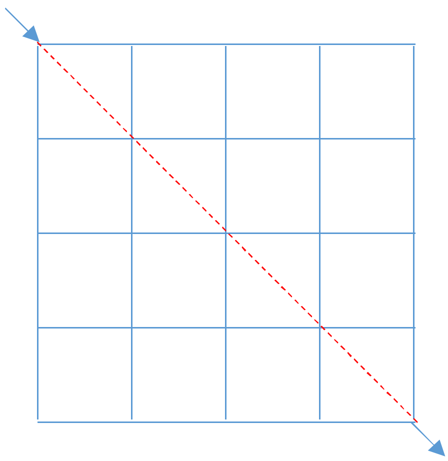
右方向に一つ移動することは白棒を 1 本並べること，下方向に移動することは赤棒を1 本並べることと同じだと考えれば，問題 A は左図で入口から出口までの道順の数を数える問題と同じになります．右図の交差点に書き込んだ赤い数字は，入口からその交差点まで行くのに辿ることができる道順の数を表しています．ここで，6 通りと示した交差点に行くには 3 通りと示した何れかの交差点を通る必要があり，3+3=6 になります．実際に 6 のすぐ上の交差点に行くには，白白赤，白赤白，赤白白の 3 通りであり，6 のすぐ左の交差点に行くには，白赤赤，赤白赤，赤赤白の 3 通りです．ある交差点から見てすぐ上の交差点の数字とすぐ左の交差点の数字を足せば，その交差点までの道順（白い棒と赤い棒の並べ方）の数になります．



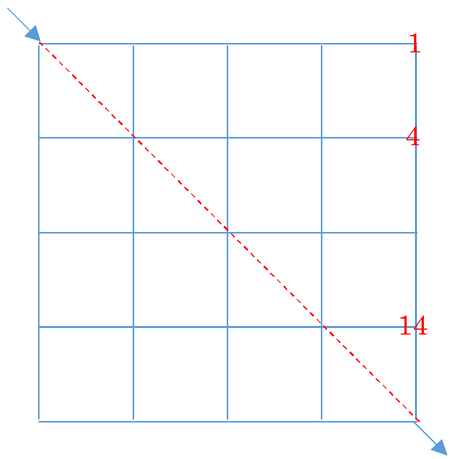
従って，問題 A の答えは 70 です．これは 8 から 4 を取る組み合わせの数です．

問題 B：左括弧が 4 個，右括弧が 4 個あるとき，括弧の括り方は何通りありますか？

赤い棒は白い棒の前に自由に来ることができますが，右括弧が左括弧の前に来るときに制約があります．つまり，)(()，())(のような配列は許されません．



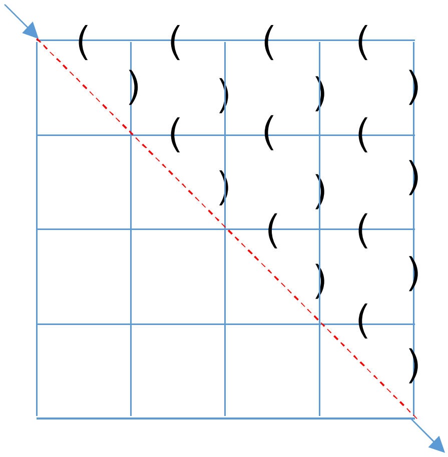
左図で入口から出口まで道順を数える時に，赤い点線より下に行ってはいけないという制約を付けます．右に行くことは「左括弧を配置すること」，下へ行くことは「右括弧を配置すること」であり，赤い点線の下に行けないことは括弧の付け方の制約と一致します．



従って，問題 B の答えは 14 です．括弧が 5 に増えた場合，42 になります．

この数はカタラン数と呼ばれており，いろいろな所に登場します．公式は $\frac{1}{n+1}\ {}_{2n}C_n$ です．

公式の求め方は割愛します．



左図で入口から出口への道を路上にある括弧を拾いながら辿って下さい．例えば，一番外側の道を辿れば(((()))))を拾うことが出来ます．赤い点線に近い道を辿れば()()()()を拾うことができます．このようにして，14 個のすべての経路を辿ることにより，すべての括弧の括り方を列挙することができます．