自然数をｋ個の異なる自然数の和で表す方法の総数

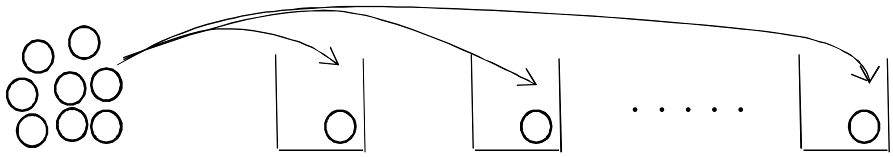
2017.11.7

問題；自然数 n を異なる k 個の自然数の和で表す方法は何通りあるか？

解説；

10 を 4 個の異なる自然数の和で表す方法は，１＋２＋３＋４の１通りです．3 個の異なる自然数の和で表す方法は，１＋２＋７，１＋３＋６，１＋４＋５，２＋３＋５の 4 通りです．自然数 n を異なる k 個の自然数の和で表す方法の総数を $c(n, k)$という記号で表わすことにします．$c(10, 4)=1$，$c(10, 3)=4$ のように表すことができます．

n を n 個のボール，k を k 個の箱と考え，$c(n, k)$を，n 個のボールを k 個の箱それぞれに異なる個数入れる方法の総数であると考えることができます．



(n-k)個　　　　k 個

ボールの個数の方が箱の個数より多いとして，すべての箱にボールを 1 個入れると(n-k)個のボールが残ります. n 個のボールを k 個の箱それぞれに異なる個数入れる方法の総数 $c(n, k)$は，(n-k)個のボールを k 個の箱それぞれに異なる個数入れる方法の総数 $c(n\text{-}k, k)$と(n-k)個のボールを(k-1)個の箱それぞれに異なる個数入れる方法の総数 $c(n\text{-}k,k\text{-}1)$との和に等しくなります．$c(n\text{-}k, n\text{-}1)$は，k 番目の箱にはボールが 1 個入っているので残りの(k-1)個の箱へのボールの異なる入れ方の総数を表しています．また，$c(n\text{-}k, k\text{-}2)$は，(k-1)番目と k 番目の箱のボールが 1 個入っていることを意味するので，それぞれの箱に異なる個数入れるという条件を満たしません．

そこで，次式が成り立ちます．

$c(n, k) = c(n\text{-}k, k) + c(n\text{-}k, k\text{-}1)$　$(n>k)$　(1)

$c(n, k)=0$　$(n<k)$　(2)

$c(n, k)=0$　$(n=k, n\neq 1)$　(3)

$c(n,1)=1$　(n は任意の自然数)　(4)

式(1)は漸化式ゆえ繰り返して適用していくと式(2)(3)(4)の形に分解でき，式(4)の形になったものを数えれば答えを求めることができます．

例えば,

$$
\begin{aligned}
c(10, 3) &= c(7, 3) + c(7, 2) = c(4, 3) + c(4, 2) + c(5, 2) + c(5, 1) \\
&= c(1, 3) + c(1, 2) + c(2, 2) + c(2, 1) + c(3, 2) + c(3, 1) + 1 \\
&= 0 + 0 + 0 + 1 + c(1, 2) + c(1, 1) + 1+ 1 \\
&= 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1 \\
&= 4
\end{aligned}
$$