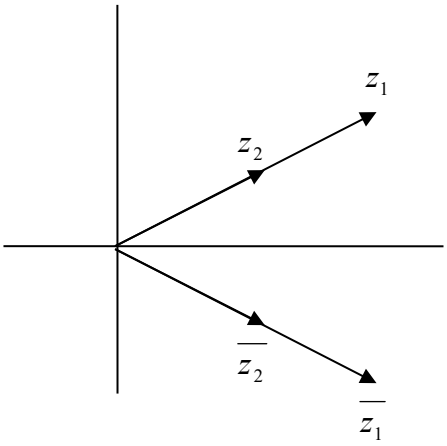
本稿は，複素平面上で三角形の五心（重心δ，外心ζ，垂心η，内心h，傍心ξ）を求めることを目的とする．文字α，β，γ，･･･は頂点などの記号を表すと同時にその場所の複素座標を表すものとする．

予備知識

平行

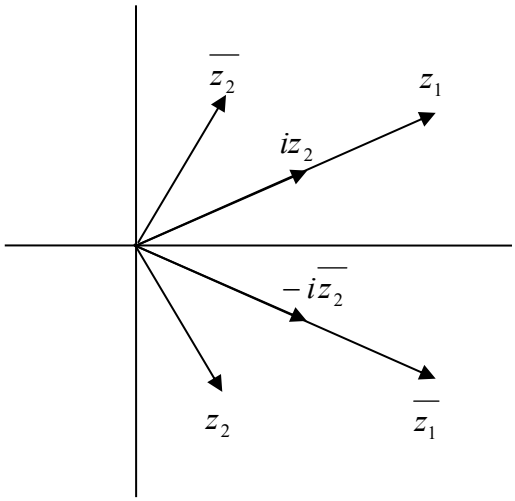
z_1 z_2 が平行である必要十分条件



$$\boxed{\frac{z_2}{z_1}=\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} \quad \Rightarrow \quad z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2=0}$$

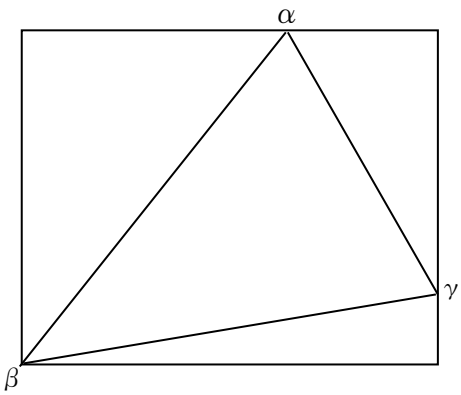
垂直

z_1 z_2 が直交する必要十分条件



$$\boxed{\frac{iz_2}{z_1}=\frac{-i\overline{z_2}}{\overline{z_1}} \quad \Rightarrow \quad z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0}$$

△α β γの面積



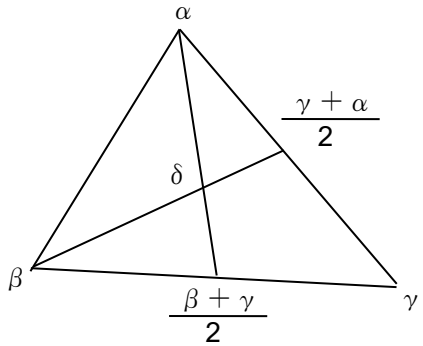
$$\alpha = x_1 + y_1 i$$
$$\beta = x_2 + y_2 i$$
$$\gamma = x_3 + y_3 i$$

とおくと左図の場合△α β γの面積 S は，

$$S=(x_3-x_2)(y_1-y_2)-\frac{1}{2}((x_1-x_2)(y_1-y_2)$$
$$+(x_3-x_2)(y_3-y_2)+(x_3-x_1)(y_1-y_3))$$
$$=\frac{1}{2}((x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3))$$
$$=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\gamma+\overline{\gamma}\alpha)\right|$$

Im は虚数部を意味する．

△α β γの重心δを求めよ.



αと$\dfrac{\beta+\gamma}{2}$を通る中線の方程式は,

$$z=\alpha+m(\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha),\quad 0\le m\le 1$$

βと$\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$を通る中線の方程式は,

$$z=\beta+n(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\beta),\quad 0\le n\le 1$$

従って,

$$\delta=\alpha+m(\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha)=\beta+n(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\beta)\quad\Rightarrow\quad 2(1-m)\alpha+m\beta+m\gamma=n\alpha+2(1-n)\beta+n\gamma$$

α, β, γの値に係らず等式が成立するためには,

$$2(1-m)=n,\quad m=2(1-n),\quad m=n$$

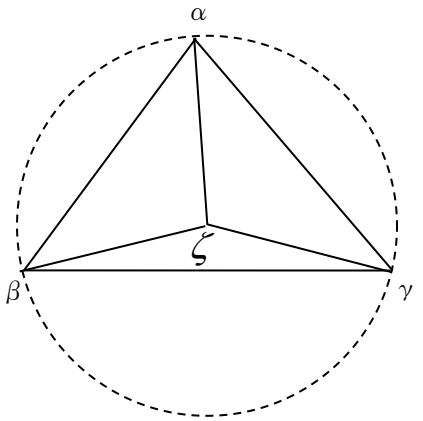
でなければならない. 従って,

$$m=n=\frac{2}{3},\quad \delta=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

γから下ろす中線を2対1に分ける点もδと一致するので, 三角形の中線は一点で交わり, その点が重心である.

$$\gamma+(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma)\times\frac{2}{3}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\delta$$

△α β γの外心ζを求めよ.



$|\alpha-\zeta|=|\beta-\zeta|=|\gamma-\zeta|=r$とおくと,

$$(\alpha-\zeta)(\overline{\alpha}-\overline{\zeta})=\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\zeta}-\overline{\alpha}\zeta+\zeta\overline{\zeta}=r^2$$

$$(\beta-\zeta)(\overline{\beta}-\overline{\zeta})=\beta\overline{\beta}-\beta\overline{\zeta}-\overline{\beta}\zeta+\zeta\overline{\zeta}=r^2$$

$$(\gamma-\zeta)(\overline{\gamma}-\overline{\zeta})=\gamma\overline{\gamma}-\gamma\overline{\zeta}-\overline{\gamma}\zeta+\zeta\overline{\zeta}=r^2$$

従って,

$$(\overline{\alpha}-\overline{\beta})\zeta+(\alpha-\beta)\overline{\zeta}=\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta}$$

$$(\overline{\beta}-\overline{\gamma})\zeta+(\beta-\gamma)\overline{\zeta}=\beta\overline{\beta}-\gamma\overline{\gamma}$$ から

$\zeta((\overline{\alpha}-\overline{\beta})(\beta-\gamma)-(\overline{\beta}-\overline{\gamma})(\alpha-\beta))=(\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta})(\beta-\gamma)-(\beta\overline{\beta}-\gamma\overline{\gamma})(\alpha-\beta)$　を得る.

辺 α β と辺 β γ は平行ではないので

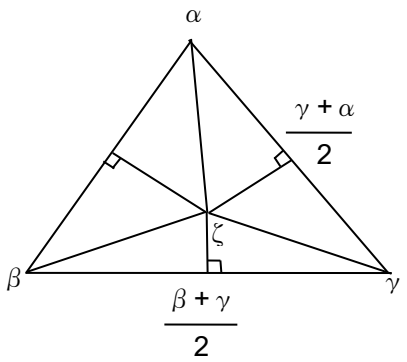
$(\overline{\alpha}-\overline{\beta})(\beta-\gamma)-(\overline{\beta}-\overline{\gamma})(\alpha-\beta)\neq 0$　従って,

$$\zeta=\frac{(\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta})(\beta-\gamma)-(\beta\overline{\beta}-\gamma\overline{\gamma})(\alpha-\beta)}{(\overline{\alpha}-\overline{\beta})(\beta-\gamma)-(\overline{\beta}-\overline{\gamma})(\alpha-\beta)}=\frac{\alpha\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\beta\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\gamma\overline{\gamma}(\alpha-\beta)}{\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\alpha\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\beta\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\gamma\overline{\gamma}(\alpha-\beta)}{\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\alpha+\overline{\gamma}\alpha-(\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\alpha}+\gamma\overline{\alpha})}=\frac{\alpha\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\beta\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\gamma\overline{\gamma}(\alpha-\beta)}{\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\alpha+\overline{\gamma}\alpha-(\overline{\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\alpha+\overline{\gamma}\alpha})}$$

$$=\frac{\alpha\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\beta\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\gamma\overline{\gamma}(\alpha-\beta)}{2\,\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\alpha+\overline{\gamma}\alpha)i}$$

外心の別解



各辺の二等分点から立てた垂線は一点で交わり, それが外心 ζ である. 辺 γ α の二等分点 $\frac{\gamma+\alpha}{2}$ と辺 β γ の二等分点 $\frac{\beta+\gamma}{2}$ から立てる垂線の交点 ζ を求める.

$$(\alpha-\gamma)(\overline{\zeta-\frac{\gamma+\alpha}{2}})+(\overline{\alpha-\gamma})(\zeta-\frac{\gamma+\alpha}{2})=0$$

$$(\gamma-\beta)(\overline{\zeta-\frac{\beta+\gamma}{2}})+(\overline{\gamma-\beta})(\zeta-\frac{\beta+\gamma}{2})=0$$

二式から $\overline{\zeta}$ を消去すると

$((\overline{\gamma}-\overline{\beta})(\alpha-\gamma)-(\gamma-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\gamma}))\zeta=\alpha\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\beta\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\gamma\overline{\gamma}(\alpha-\beta)$

を得る.

$(\overline{\gamma}-\overline{\beta})(\alpha-\gamma)-(\gamma-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\gamma})=0\Leftrightarrow$ 辺 β γ // 辺 γ α

矛盾するので $(\overline{\gamma}-\overline{\beta})(\alpha-\gamma)-(\gamma-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\gamma})\neq 0$

$(\overline{\gamma}-\overline{\beta})(\alpha-\gamma)-(\gamma-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\gamma})=\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta)$　ゆえ

$$\zeta=\frac{\alpha\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\beta\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\gamma\overline{\gamma}(\alpha-\beta)}{\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta)}=\frac{\alpha\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\beta\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\gamma\overline{\gamma}(\alpha-\beta)}{2\,\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\alpha+\overline{\gamma}\alpha)i}$$

を得る. $\frac{\alpha+\beta}{2}$ から立てた垂線が ζ を通るのは自明である.

ここで外接円の半径 R を求める.

$$R^2=|\zeta-\alpha|^2=(\zeta-\alpha)(\overline{\zeta}-\overline{\alpha})$$

$$=\left(\frac{\alpha\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\beta\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\gamma\overline{\gamma}(\alpha-\beta)}{\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta)}-\alpha\right)\left(\frac{\alpha\overline{\alpha}(\overline{\beta}-\overline{\gamma})+\beta\overline{\beta}(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})+\gamma\overline{\gamma}(\overline{\alpha}-\overline{\beta})}{\alpha(\overline{\beta}-\overline{\gamma})+\beta(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})+\gamma(\overline{\alpha}-\overline{\beta})}-\overline{\alpha}\right)$$

$$=\frac{(\overline{\beta}(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha))(\beta(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})(\overline{\beta}-\overline{\alpha})+\gamma(\overline{\alpha}-\overline{\beta})(\overline{\gamma}-\overline{\alpha}))}{(\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta))(\alpha(\overline{\beta}-\overline{\gamma})+\beta(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})+\gamma(\overline{\alpha}-\overline{\beta}))}$$

$$=\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})(\overline{\beta}-\overline{\gamma})(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})}{(\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta))(\alpha(\overline{\beta}-\overline{\gamma})+\beta(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})+\gamma(\overline{\alpha}-\overline{\beta}))}$$

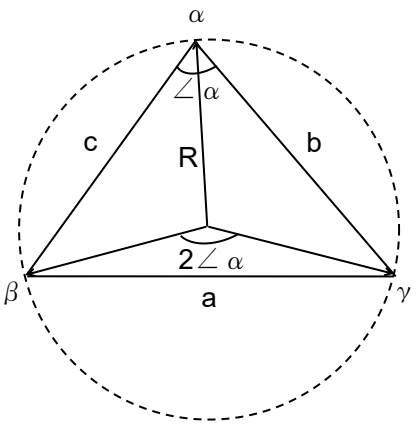
従って

$$R=\sqrt{\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})(\overline{\beta}-\overline{\gamma})(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})}{(\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta))(\alpha(\overline{\beta}-\overline{\gamma})+\beta(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})+\gamma(\overline{\alpha}-\overline{\beta}))}}$$

$$=\frac{|\alpha-\beta||\beta-\gamma||\gamma-\alpha|}{\sqrt{-(\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta))^2}}=\frac{|\alpha-\beta||\beta-\gamma||\gamma-\alpha|}{(\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta))i}$$

$$=\frac{|\alpha-\beta||\beta-\gamma||\gamma-\alpha|}{2\,\mathrm{Im}\left|(\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\alpha+\overline{\gamma}\alpha)\right|}$$

外接円の半径 R の別解



$a=|\beta-\gamma|, b=|\gamma-\alpha|, c=|\alpha-\beta|$ とする.

$a=2R\sin(\angle\alpha)$

△α β γの面積 S は

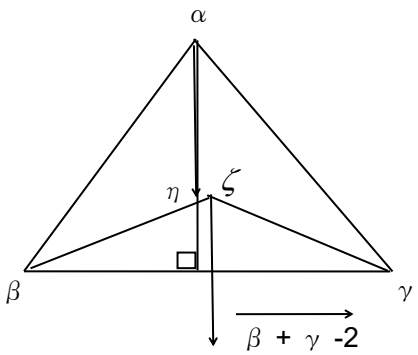
$$S=\frac{1}{2}(c\sin(\angle\alpha))b=\frac{1}{2}bc\sin(\angle\alpha)$$

$\sin(\angle\alpha)$を消去すると

$S=\dfrac{abc}{4R}$ 従って

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{|\alpha-\beta||\beta-\gamma||\gamma-\alpha|}{2\left|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta+\overline{\beta}\gamma+\overline{\gamma}\alpha)\right|}$$

<u>△α β γの垂心ηを求めよ.</u>



△α β γの外心をζとする.

ベクトル $\overrightarrow{\beta-\zeta}$ とベクトル $\overrightarrow{\gamma-\zeta}$ の和 $\overrightarrow{\beta+\gamma-2\zeta}$ とベクトル $\overrightarrow{\gamma-\beta}$ からなる次の値を計算する.

$$(\beta+\gamma-2\zeta)(\overline{\gamma}-\overline{\beta})+(\overline{\beta}+\overline{\gamma}-2\overline{\zeta})(\gamma-\beta)$$
$$=2(\gamma\overline{\gamma}-\beta\overline{\beta})+2(\overline{\beta}-\overline{\gamma})\zeta+2(\beta-\gamma)\overline{\zeta}$$

$|\beta-\zeta|=|\gamma-\zeta|$　ここで,

$$(\beta-\zeta)(\overline{\beta}-\overline{\zeta})=(\gamma-\zeta)(\overline{\gamma}-\overline{\zeta})$$

$\beta\overline{\beta}-\beta\overline{\zeta}-\overline{\beta}\zeta+\zeta\overline{\zeta}=\gamma\overline{\gamma}-\gamma\overline{\zeta}-\overline{\gamma}\zeta+\zeta\overline{\zeta}$　従って,

$\gamma\overline{\gamma}-\beta\overline{\beta}=-(\beta-\gamma)\overline{\zeta}-(\overline{\beta}-\overline{\gamma})\zeta$　従って,

$$(\beta+\gamma-2\zeta)(\overline{\gamma}-\overline{\beta})+(\overline{\beta}+\overline{\gamma}-2\overline{\zeta})(\gamma-\beta)=2(\gamma\overline{\gamma}-\beta\overline{\beta})+2(\overline{\beta}-\overline{\gamma})\zeta+2(\beta-\gamma)\overline{\zeta}=0$$

ベクトル $\overrightarrow{\beta+\gamma-2\zeta}$ とベクトル $\overrightarrow{\gamma-\beta}$ は直交することが分かった．α から辺 β γ に下ろした垂線と

ベクトル $\overrightarrow{\beta+\gamma-2\zeta}$ は平行である．α にベクトル $\overrightarrow{\beta+\gamma-2\zeta}$ を加えた値を η とする.

$$\eta=\alpha+\beta+\gamma-2\zeta$$

η は，α から辺 β γ に下ろした垂線上にある. この値は α，β , γ に関して対称であるので，β から辺 γ α に下ろした垂線上にあり, かつ，γ から辺 α β に下ろした垂線上にあるので垂心である.

垂心の別解 1

β から辺 γ α に下ろした垂線と γ から辺 α β に下ろした垂線の交点を η とする.

$$\begin{aligned}(\alpha-\gamma)(\overline{\beta}-\overline{\eta})+(\overline{\alpha}-\overline{\gamma})(\beta-\eta)=0\\(\beta-\alpha)(\overline{\gamma}-\overline{\eta})+(\overline{\beta}-\overline{\gamma})(\gamma-\eta)=0\end{aligned}$$　従って,

$$(\overline{\alpha}-\overline{\beta})\eta+(\alpha-\beta)\overline{\eta}=(\overline{\alpha}-\overline{\beta})\gamma+(\alpha-\beta)\overline{\gamma}$$
$$(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})\eta+(\gamma-\alpha)\overline{\eta}=(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})\beta+(\gamma-\alpha)\overline{\beta}$$

η に関して解けば

$$((\overline{\alpha}-\overline{\beta})(\gamma-\alpha)-(\alpha-\beta)(\overline{\gamma}-\overline{\alpha}))\eta=((\overline{\alpha}-\overline{\beta})\gamma+(\alpha-\beta)\overline{\gamma})(\gamma-\alpha)-((\overline{\gamma}-\overline{\alpha})\beta+(\gamma-\alpha)\overline{\beta})(\alpha-\beta)$$

ここで, 辺 α β と辺 γ α は平行ではないので,

$(\overline{\alpha}-\overline{\beta})(\gamma-\alpha)-(\alpha-\beta)(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})=\alpha(\overline{\beta}-\overline{\gamma})+\beta(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})+\gamma(\overline{\alpha}-\overline{\beta})\neq 0$　従って,

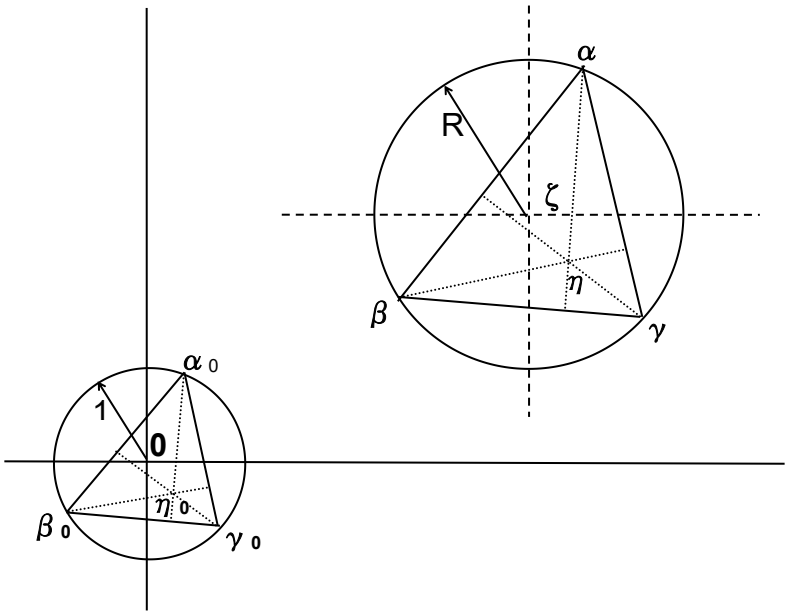
$$\eta=\frac{\alpha^2(\overline{\beta}-\overline{\gamma})+\beta^2(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})+\gamma^2(\overline{\alpha}-\overline{\beta})+\alpha\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\beta\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\gamma\overline{\gamma}(\alpha-\beta)}{\alpha(\overline{\beta}-\overline{\gamma})+\beta(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})+\gamma(\overline{\alpha}-\overline{\beta})}$$

$$\eta-(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=\frac{\alpha^2(\overline{\beta}-\overline{\gamma})+\beta^2(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})+\gamma^2(\overline{\alpha}-\overline{\beta})+\alpha\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\beta\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\gamma\overline{\gamma}(\alpha-\beta)}{\alpha(\overline{\beta}-\overline{\gamma})+\beta(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})+\gamma(\overline{\alpha}-\overline{\beta})}-(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=\frac{2(\alpha\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\beta\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\gamma\overline{\gamma}(\alpha-\beta))}{\alpha(\overline{\beta}-\overline{\gamma})+\beta(\overline{\gamma}-\overline{\alpha})+\gamma(\overline{\alpha}-\overline{\beta})}=-\frac{2(\alpha\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\beta\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\gamma\overline{\gamma}(\alpha-\beta))}{\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta)}=-2\varsigma$$
$$\therefore\quad \eta=\alpha+\beta+\gamma-2\varsigma$$

次に，η が垂心であることを決定するために α と η を結ぶ線分と辺 $\beta\gamma$ が直交することを，多少，計算が面倒だが次式で確認することができる.

$$(\eta-\alpha)(\overline{\gamma}-\overline{\beta})+(\overline{\eta}-\overline{\alpha})(\gamma-\beta)=0$$

垂心の別解 2



最初に原点 0 を外心とする $\triangle\alpha_0\beta_0\gamma_0$ の垂心 η_0 を求める. このとき

$$|\alpha_0|=|\beta_0|=|\gamma_0|=1$$

とする.

次に $\triangle\alpha_0\beta_0\gamma_0$ と相似な $\triangle\alpha\beta\gamma$ の垂心 η を考える. このとき

$$|\alpha-\zeta|=|\beta-\zeta|=|\gamma-\zeta|=R$$
$$\Delta\alpha_0\beta_0\gamma_0\propto\Delta\alpha\beta\gamma\Leftrightarrow\frac{\beta_0-\alpha_0}{\gamma_0-\alpha_0}=\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$$

β_0 から辺 $\gamma_0\alpha_0$ に下ろした垂線と γ_0 から辺 $\alpha_0\beta_0$ に下ろした垂線の交点を η_0 とする.

$$(\alpha_0-\gamma_0)(\overline{\beta}_0-\overline{\eta}_0)+(\overline{\alpha}_0-\overline{\gamma}_0)(\beta_0-\eta_0)=0$$
$$(\beta_0-\alpha_0)(\overline{\gamma}_0-\overline{\eta}_0)+(\overline{\beta}_0-\overline{\gamma}_0)(\gamma_0-\eta_0)=0$$

従って,

$$(\overline{\alpha}_0-\overline{\beta}_0)\eta_0+(\alpha_0-\beta_0)\overline{\eta}_0=(\overline{\alpha}_0-\overline{\beta}_0)\gamma_0+(\alpha_0-\beta_0)\overline{\gamma}_0$$
$$(\overline{\gamma}_0-\overline{\alpha}_0)\eta_0+(\gamma_0-\alpha_0)\overline{\eta}_0=(\overline{\gamma}_0-\overline{\alpha}_0)\beta_0+(\gamma_0-\alpha_0)\overline{\beta}_0$$

η_0 に関して解けば,

$$((\overline{\alpha}_0-\overline{\beta}_0)(\gamma_0-\alpha_0)-(\alpha_0-\beta_0)(\overline{\gamma}_0-\overline{\alpha}_0))\eta_0$$
$$=((\overline{\alpha}_0-\overline{\beta}_0)\gamma_0+(\alpha_0-\beta_0)\overline{\gamma}_0)(\gamma_0-\alpha_0)-((\overline{\gamma}_0-\overline{\alpha}_0)\beta_0+(\gamma_0-\alpha_0)\overline{\beta}_0)(\alpha_0-\beta_0)$$

ここで，辺 $\alpha_0\beta_0$ と辺 $\gamma_0\alpha_0$ は平行ではないので,

$$(\overline{\alpha}_0-\overline{\beta}_0)(\gamma_0-\alpha_0)-(\alpha_0-\beta_0)(\overline{\gamma}_0-\overline{\alpha}_0)=\alpha_0(\overline{\beta}_0-\overline{\gamma}_0)+\beta_0(\overline{\gamma}_0-\overline{\alpha}_0)+\gamma_0(\overline{\alpha}_0-\overline{\beta}_0)\neq 0$$

従って,

$$\eta_0=\frac{{\alpha_0}^2(\overline{\beta}_0-\overline{\gamma}_0)+{\beta_0}^2(\overline{\gamma}_0-\overline{\alpha}_0)+{\gamma_0}^2(\overline{\alpha}_0-\overline{\beta}_0)}{\alpha_0(\overline{\beta}_0-\overline{\gamma}_0)+\beta_0(\overline{\gamma}_0-\overline{\alpha}_0)+\gamma_0(\overline{\alpha}_0-\overline{\beta}_0)}$$

$$\eta_0-(\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)=\frac{{\alpha_0}^2(\overline{\beta}_0-\overline{\gamma}_0)+{\beta_0}^2(\overline{\gamma}_0-\overline{\alpha}_0)+{\gamma_0}^2(\overline{\alpha}_0-\overline{\beta}_0)}{\alpha_0(\overline{\beta}_0-\overline{\gamma}_0)+\beta_0(\overline{\gamma}_0-\overline{\alpha}_0)+\gamma_0(\overline{\alpha}_0-\overline{\beta}_0)}-(\alpha_0+\beta_0+\gamma_0)=0$$

$\therefore\ \eta_0=\alpha_0+\beta_0+\gamma_0$

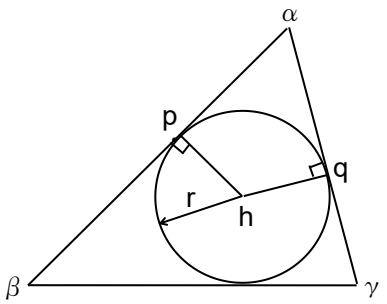
$\eta_0\to(\eta-\zeta)/R,\quad \alpha_0\to(\alpha-\zeta)/R,\quad \beta_0\to(\beta-\zeta)/R,\quad \gamma_0\to(\gamma-\zeta)/R$

で置換すると,

$\eta-\zeta=(\alpha-\zeta)+(\beta-\zeta)+(\gamma-\zeta)$

$\therefore\ \eta=\alpha+\beta+\gamma-2\zeta$

<u>△αβγの内心hを求めよ.</u>



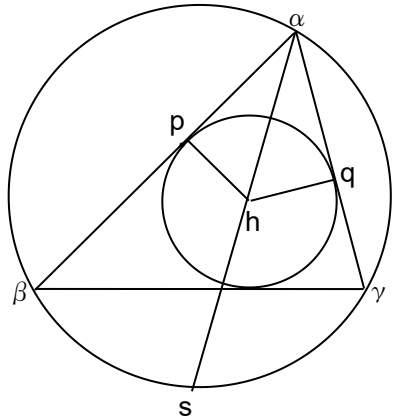
△αβγの頂点αと内心hを結ぶ線分は∠αを二等分する.

証明

hから辺αβ, 辺γαに下ろした垂線の足をそれぞれp,qとし内接円の半径をrとする.（記号$\overline{lm}$は辺ℓmを表す.）

$\angle\alpha ph=\angle\alpha qh=\angle R,\quad \overline{hp}=\overline{hq}=r,\quad \overline{\alpha h}=\overline{\alpha h}$

$\to\Delta\alpha ph\equiv\Delta\alpha qh\quad\therefore\angle p\alpha h=\angle h\alpha q$



直線αhと△αβγの外接円との交点をsとすれば, 弧βsの長さは, 弧sγの長さに等しい.

証明

直線αhは∠αを2等分するので,

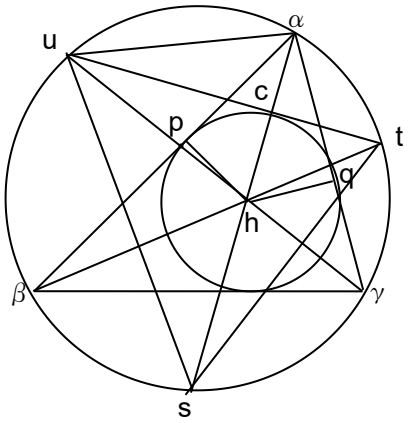
$\angle\beta\alpha s=\angle s\alpha\gamma$

$\angle\beta\alpha s=\angle\beta\gamma s,\quad \angle s\alpha\gamma=\angle s\beta\gamma$

$\therefore\angle s\beta\gamma=\angle\beta\gamma s\quad\to\quad\overline{\beta s}=\overline{s\gamma}$

従って,

弧βsの長さと弧sγの長さは等しい.



△αβγの外接円上の弧βγ，弧γα，弧αβを2等分する点をs,t,uとする．△stuの垂心は△αβγの内心と一致する．

証明

線分αs,線分βt，線分γuは，それぞれ∠α，∠β，∠γを二等分するので，△αβγの内心hを通る．それぞれが線分tu，線分us，線分stと直交することを示せばよい．

線分αsと線分tuが直交することを示す．

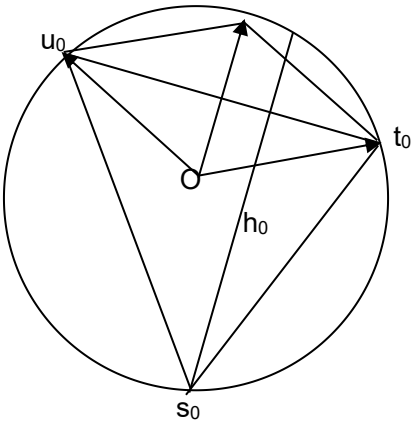
$$\angle\alpha ut = \angle\alpha\beta t = \frac{\angle\beta}{2},\quad \angle u\alpha\beta = \angle u\gamma\beta = \frac{\angle\gamma}{2},\quad \angle\beta\alpha s = \frac{\angle\alpha}{2}$$

線分tuと線分αsの交点をcとすれば，

$$\angle\alpha cu = 2\angle R - \frac{\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma}{2} = \angle R \quad \Rightarrow \quad \therefore \alpha s \perp tu,$$ 同様に，$\beta t \perp us,\quad \gamma u \perp st$

従って，hは，△stuの垂心である．

△$s_0t_0u_0$の垂心を求めよ．



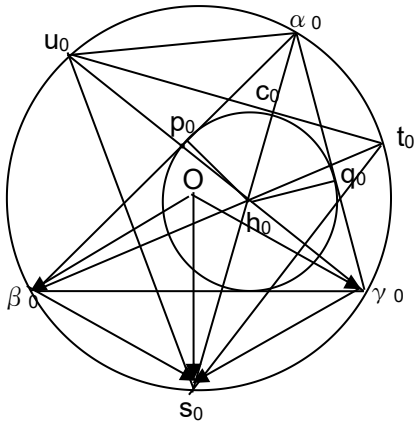
△$\alpha_0\beta_0\gamma_0$の外心を原点Oとし，外接円の半径を1とする．

S_0から線分t_0u_0に垂線をおろす．

$$\begin{aligned}&(u_0+t_0)\overline{(t_0-u_0)}+\overline{(u_0+t_0)}(t_0-u_0)\\&=u_0\overline{t_0}-u_0\overline{u_0}+t_0\overline{t_0}-\overline{u_0}t_0+\overline{u_0}t_0-u_0\overline{u_0}+t_0\overline{t_0}-u_0\overline{t_0}\\&=2(t_0\overline{t_0}-u_0\overline{u_0})=0\end{aligned}$$

従って，

ベクトル$\overrightarrow{u_0+t_0}$は線分t_0u_0と直交するのでs_0からt_0u_0におろした垂線とは平行である．



$h_0 = s_0 + t_0 + u_0$とすれば，h_0は同垂線上の点になる．

h_0は，s_0,t_0,u_0に関して対称であり，t_0から辺u_0s_0またu_0から辺s_0t_0におろした垂線もこの点を通ることになり，△$s_0t_0u_0$の垂心である．

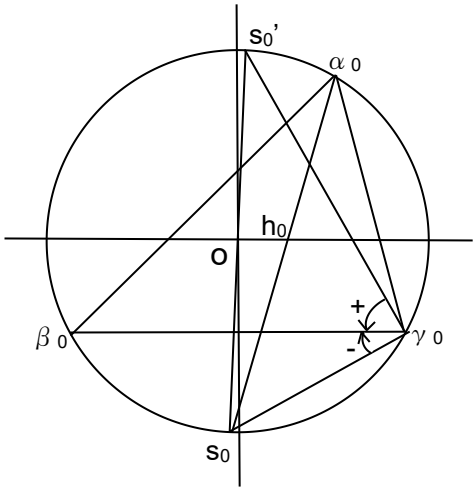
△$\alpha_0\beta_0\gamma_0$の内心を求めよ．

s_0は弧$\beta_0\gamma_0$を2等分するので，

$$|s_0-\beta_0|=|s_0-\gamma_0| \quad\to\quad |s_0-\beta_0|^2=|s_0-\gamma_0|^2 \quad\to\quad (s_0-\beta_0)(\overline{s_0-\beta_0})=(\overline{s_0-\gamma_0})(s_0-\gamma_0)$$

$$\to\quad s_0=\frac{\gamma_0-\beta_0}{\overline{\beta}_0-\overline{\gamma}_0}\overline{s}_0=\frac{\gamma_0-\beta_0}{\overline{\beta}_0-\overline{\gamma}_0}\frac{1}{s_0}=\frac{\gamma_0-\beta_0}{\dfrac{1}{\beta_0}-\dfrac{1}{\gamma_0}}\frac{1}{s_0}=\frac{\beta_0\gamma_0}{s_0} \quad\to\quad {s_0}^2=\beta_0\gamma_0 \quad\to\quad s_0=\pm\sqrt{\beta_0\gamma_0}$$

同様に，$t_0=\pm\sqrt{\gamma_0\alpha_0}$，　$u_0=\pm\sqrt{\alpha_0\beta_0}$　　ここで，s_0,t_0,u_0 の符号は次のようにして定めることができる．s_0 に例をとれば s_0 は $|z|=1$ の円周上に原点を対称にして劣弧側と優弧側にそれぞれ解がある．



$\angle\beta_0\gamma_0 s_0<0$

$$\to\quad \arg(\beta_0-\gamma_0)-\arg(s_0-\gamma_0)=\arg\frac{\beta_0-\gamma_0}{s_0-\gamma_0}<0$$

になるよう s_0 の符号を選べばよい．従って，

$h_0=s_0+t_0+u_0,$

$s_0=\pm\sqrt{\beta_0\gamma_0}, t_0=\pm\sqrt{\gamma_0\alpha_0}, u_0=\pm\sqrt{\alpha_0\beta_0}$

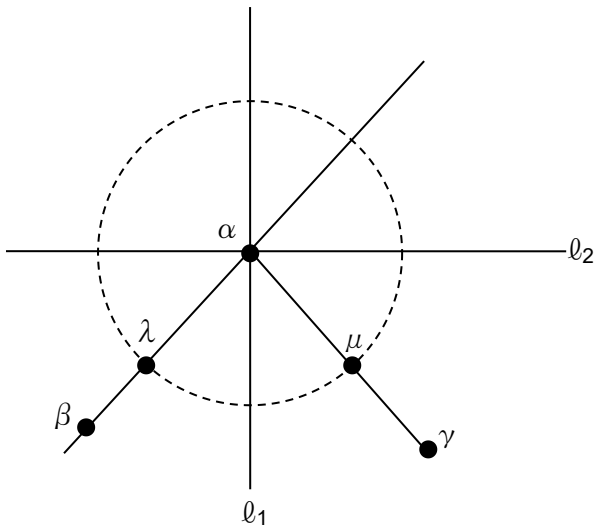
ここで，

$h_0\to(h-\zeta)/R,\quad \alpha_0\to(\alpha-\zeta)/R,\quad \beta_0\to(\beta-\zeta)/R,\quad \gamma_0\to(\gamma-\zeta)/R$ の置換を行うと，

$$h=\varsigma\pm\sqrt{(\beta-\varsigma)(\gamma-\varsigma)}\pm\sqrt{(\gamma-\varsigma)(\alpha-\varsigma)}\pm\sqrt{(\alpha-\varsigma)(\beta-\varsigma)}$$

内心の別解

s_0,t_0,u_0 は，$\angle\alpha_0,\angle\beta_0,\angle\gamma_0$ をそれぞれ二等分する直線と円 $|z|=1$ の交点として求めることができる．



最初に角の二等分線を表す式を求める．

$\alpha,\beta,\gamma\in C$ とし，直線 α β と直線 α γ がなす角の二等分線ℓ1，ℓ2を求める．

$\lambda=\dfrac{\beta-\alpha}{|\beta-\alpha|},\quad \mu=\dfrac{\gamma-\alpha}{|\gamma-\alpha|}$　とおく．λ，μ は，それぞれベクトル $\overrightarrow{\alpha\beta}$, ベクトル $\overrightarrow{\alpha\gamma}$ と同一方向の長さ 1 のベクトルである．

ℓ1: $z-\alpha=n(\lambda+\mu),\quad n\in R$

ℓ2: $z-\alpha=m(-\lambda+\mu),\quad m\in R$

ここで

$$n(\lambda+\mu)\overline{m(-\lambda+\mu)}+\overline{n(\lambda+\mu)}m(-\lambda+\mu)$$
$$=2nm(\mu\overline{\mu}-\lambda\overline{\lambda})=0$$

∴ $\ell_1 \perp \ell_2$

ℓ_1, ℓ_2の方程式のそれぞれの共役をとって n, m を消去する.

ℓ_1に関して

$$z-\alpha=n(\lambda+\mu),\quad \overline{z}-\overline{\alpha}=n(\overline{\lambda}+\overline{\mu})=n(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu})=n(\frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu})$$

$$\rightarrow z-\alpha=\lambda\mu(\overline{z}-\overline{\alpha})\quad \lambda=\frac{\beta-\alpha}{|\beta-\alpha|},\mu=\frac{\gamma-\alpha}{|\gamma-\alpha|}$$

ℓ_2に関して

$$z-\alpha=n(-\lambda+\mu),\quad \overline{z}-\overline{\alpha}=n(-\overline{\lambda}+\overline{\mu})=n(-\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu})=n(\frac{-\mu+\lambda}{\lambda\mu})$$

$$\rightarrow z-\alpha=-\lambda\mu(\overline{z}-\overline{\alpha})\quad \lambda=\frac{\beta-\alpha}{|\beta-\alpha|},\mu=\frac{\gamma-\alpha}{|\gamma-\alpha|}$$

ℓ_1に関する式と$|z|=1\rightarrow z\overline{z}=1$から$\overline{z}$を消去して

$z-\alpha_0=\lambda_{01}\mu_{01}(\frac{1}{z}-\frac{1}{\alpha_0})\rightarrow z-\alpha_0=\frac{\lambda_{01}\mu_{01}(\alpha_0-z)}{\alpha_0 z}\rightarrow$ $z\neq\alpha_0$ ゆえ $z=-\frac{\lambda_{01}\mu_{01}}{\alpha_0}$ を得る.

$$s_0=-\frac{\lambda_{01}\mu_{01}}{\alpha_0},\quad \lambda_{01}=\frac{\beta_0-\alpha_0}{|\beta_0-\alpha_0|},\mu_{01}=\frac{\gamma_0-\alpha_0}{|\gamma_0-\alpha_0|}$$

同様にして
$$t_0=-\frac{\lambda_{02}\mu_{02}}{\beta_0},\quad \lambda_{02}=\frac{\gamma_0-\beta_0}{|\gamma_0-\beta_0|},\quad \mu_{02}=\frac{\alpha_0-\beta_0}{|\alpha_0-\beta_0|}$$
$$u_0=-\frac{\lambda_{03}\mu_{03}}{\gamma_0},\quad \lambda_{03}=\frac{\alpha_0-\gamma_0}{|\alpha_0-\gamma_0|},\quad \mu_{03}=\frac{\beta_0-\gamma_0}{|\beta_0-\gamma_0|}$$
を得る.

従って, h_0は,

$$h_0=-\frac{\lambda_{01}\mu_{01}}{\alpha_0}-\frac{\lambda_{02}\mu_{02}}{\beta_0}-\frac{\lambda_{03}\mu_{03}}{\gamma_0}$$

△α β γの外心をζ, 外接円の半径を R とし,

$h_0\rightarrow(h-\zeta)/R,\quad \alpha_0\rightarrow(\alpha-\zeta)/R,\quad \beta_0\rightarrow(\beta-\zeta)/R,\quad \gamma_0\rightarrow(\gamma-\zeta)/R$ の置換を行うと,

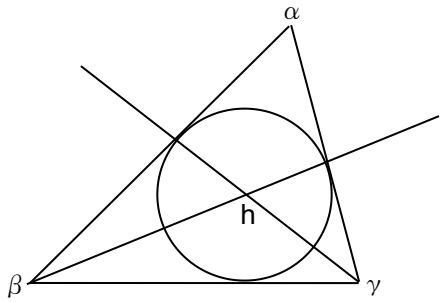
内心 h は,

$$h=\zeta-(\frac{\lambda_1\mu_1}{\alpha-\varsigma}+\frac{\lambda_2\mu_2}{\beta-\varsigma}+\frac{\lambda_3\mu_3}{\gamma-\varsigma})R^2,\quad \lambda_1=\frac{\beta-\alpha}{|\beta-\alpha|},\mu_1=\frac{\gamma-\alpha}{|\gamma-\alpha|},\lambda_2=\frac{\gamma-\beta}{|\gamma-\beta|},\mu_2=\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|},$$

$$\lambda_3=\frac{\alpha-\gamma}{|\alpha-\gamma|},\mu_3=\frac{\beta-\gamma}{|\beta-\gamma|}$$

内心の別解 2

∠βの二等分線と∠γの二等分線の交点 h を求めればよい.



∠βの二等分線:

$$z-\beta=\lambda_1\mu_1(\bar{z}-\bar{\beta})\quad \lambda_1=\frac{\gamma-\beta}{|\gamma-\beta|},\mu_1=\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}$$

∠γの二等分線:

$$z-\gamma=\lambda_2\mu_2(\bar{z}-\bar{\gamma})\quad \lambda_2=\frac{\alpha-\gamma}{|\alpha-\gamma|},\mu_2=\frac{\beta-\gamma}{|\beta-\gamma|}$$

二つの二等分線から $\bar{z}$ を消去し, 交点 h を求める.

$$\frac{z-\beta}{\lambda_1\mu_1}+\bar{\beta}=\frac{z-\gamma}{\lambda_2\mu_2}+\bar{\gamma}\quad\rightarrow\quad(\frac{1}{\lambda_1\mu_1}-\frac{1}{\lambda_2\mu_2})z=\frac{\beta}{\lambda_1\mu_1}-\frac{\gamma}{\lambda_2\mu_2}-(\bar{\beta}-\bar{\gamma})$$

$$\rightarrow\quad(\lambda_2\mu_2-\lambda_1\mu_1)z=\lambda_2\mu_2\beta-\lambda_1\mu_1\gamma-\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2(\bar{\beta}-\bar{\gamma})$$

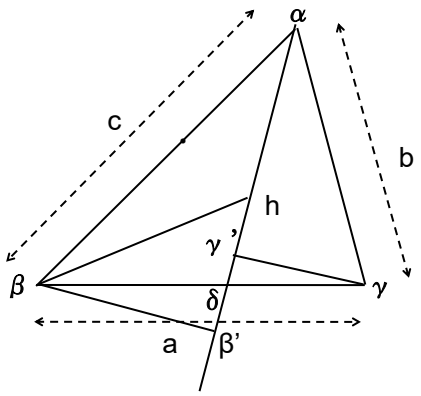
ここで,

$\lambda_2\mu_2-\lambda_1\mu_1=0$ を仮定すると $\frac{\gamma-\beta}{|\gamma-\beta|}\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}=\frac{\alpha-\gamma}{|\alpha-\gamma|}\frac{\beta-\gamma}{|\beta-\gamma|}\quad\rightarrow\quad\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}=-\frac{\alpha-\gamma}{|\alpha-\gamma|}$

になり, ベクトル $\overrightarrow{\alpha-\beta}$ とベクトル $\overrightarrow{\alpha-\gamma}$ が平行するので矛盾. 従って, $\lambda_2\mu_2\neq\lambda_1\mu_1$

$$z=h=\frac{\lambda_2\mu_2\beta-\lambda_1\mu_1\gamma-\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2(\bar{\beta}-\bar{\gamma})}{\lambda_2\mu_2-\lambda_1\mu_1}\quad \lambda_1=\frac{\gamma-\beta}{|\gamma-\beta|},\mu_1=\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|},\lambda_2=\frac{\alpha-\gamma}{|\alpha-\gamma|},\mu_2=\frac{\beta-\gamma}{|\beta-\gamma|}$$

内心の別解 3



三角形αβγにおいて, $a=|\beta-\gamma|,b=|\gamma-\alpha|,c=|\alpha-\beta|$

とする. 角αを二等分する線と辺 $\overline{\beta\gamma}$ の交点をδとする.

線分 $\overline{\alpha\delta}$ にβから下ろした垂線の足をβ', γから下ろした垂線の足をγ'とする.

$\Delta\alpha\beta\beta'\propto\Delta\alpha\gamma\gamma'$ ゆえ $c:b=|\beta-\beta'|:|\gamma-\gamma'|$

$\Delta\beta\delta\beta'\propto\Delta\gamma\delta\gamma'$ ゆえ $|\beta-\delta|:|\gamma-\delta|=|\beta-\beta'|:|\gamma-\gamma'|$

$\therefore |\beta-\delta| : |\gamma-\delta| = c : b$

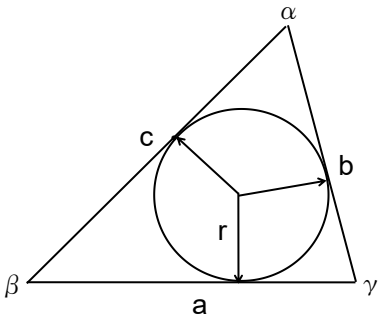
即ち，δ は辺 $\overline{\beta\gamma}$ を $c:b$ に内分する点である．従って，$\delta = \dfrac{b\beta + c\gamma}{b+c}$

次に角 β を二等分する線と線分 $\overline{\delta\alpha}$ の交点（内心）を h とする．h は，線分 $\overline{\delta\alpha}$ を $|\delta-\beta| : c$ に内分する点である．

$$|\delta-\beta| = \left|\frac{b\beta+c\gamma}{b+c} - \beta\right| = \left|\frac{c(\gamma-\beta)}{b+c}\right| = \frac{ac}{b+c}$$

$$h = \frac{c\delta + \dfrac{ac}{b+c}\alpha}{c + \dfrac{ac}{b+c}} = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} = \frac{\alpha|\beta-\gamma| + \beta|\gamma-\alpha| + \gamma|\alpha-\beta|}{|\alpha-\beta| + |\beta-\gamma| + |\gamma-\alpha|}$$

ここで内接円の半径 r を求める．



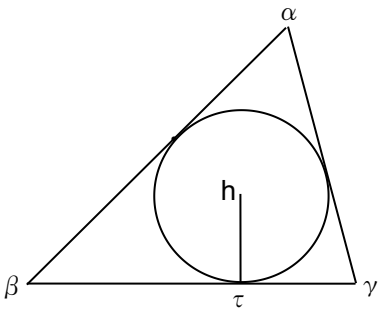
$a = |\beta-\gamma|, b = |\gamma-\alpha|, c = |\alpha-\beta|$ とする．

△ α β γ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}(ra + rb + rc) = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

従って，$r = \dfrac{2S}{a+b+c} = \dfrac{|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta + \overline{\beta}\gamma + \overline{\gamma}\alpha)|}{|\alpha-\beta| + |\beta-\gamma| + |\gamma-\alpha|}$

内接円の半径 r の別解



内心 h から辺 β γ に下ろした垂線の足を τ とする．

ベクトル $\overrightarrow{h\tau}$ とベクトル $\overrightarrow{\beta\gamma}$ は直交するので

$$(\tau-h)\overline{(\gamma-\beta)} + \overline{(\tau-h)}(\gamma-\beta) = 0$$

ベクトル $\overrightarrow{\beta\tau}$ とベクトル $\overrightarrow{\beta\gamma}$ は平行するので

$$(\tau-\beta)\overline{(\gamma-\beta)} - \overline{(\tau-\beta)}(\gamma-\beta) = 0$$

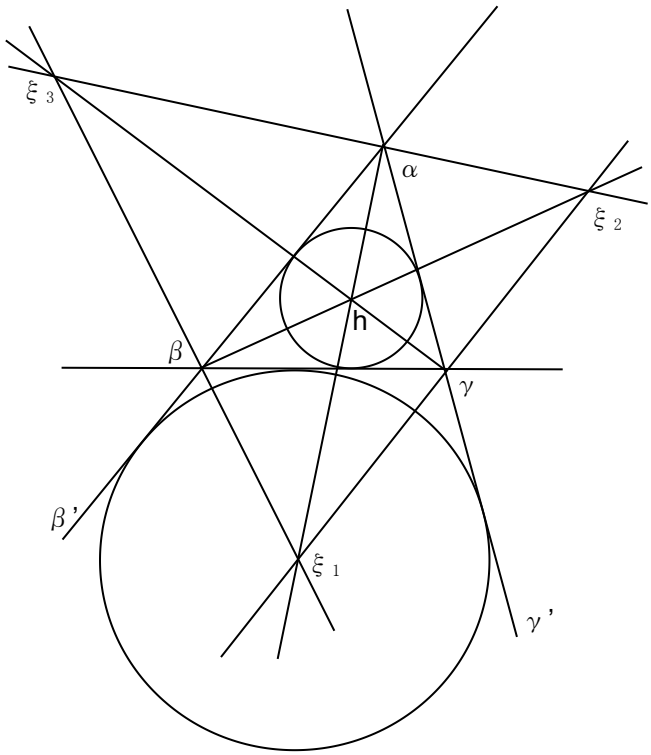
$$(\bar{\gamma}-\bar{\beta})\tau+(\gamma-\beta)\bar{\tau}=(\bar{\gamma}-\bar{\beta})h+(\gamma-\beta)\bar{h}$$
$$(\bar{\gamma}-\bar{\beta})\tau-(\gamma-\beta)\bar{\tau}=(\bar{\gamma}-\bar{\beta})\beta-(\gamma-\beta)\bar{\beta}$$

$\bar{\tau}$を消去すると,

$$2(\bar{\gamma}-\bar{\beta})\tau=(\bar{\gamma}-\bar{\beta})(h+\beta)+(\gamma-\beta)(\bar{h}-\bar{\beta}),\quad \gamma\neq\beta\to\bar{\gamma}-\bar{\beta}\neq 0$$
$$\therefore\tau=\frac{1}{2}(h+\beta)+\frac{(\gamma-\beta)(\bar{h}-\bar{\beta})}{2(\bar{\gamma}-\bar{\beta})}=\frac{1}{2}(h+\frac{\gamma-\beta}{\bar{\gamma}-\bar{\beta}}\bar{h}+\frac{\beta\bar{\gamma}-\bar{\beta}\gamma}{\bar{\gamma}-\bar{\beta}})$$
$$r^2=(\tau-h)\overline{(\tau-h)}\quad\therefore\ r=\sqrt{(\tau-h)(\bar{\tau}-\bar{h})}$$

<u>△αβγの傍心ξを求めよ.</u>

線分αβの延長上にβ', 線分αγの延長上にγ'をとる. ∠β'βγの二等分線と∠γ'γβの二等分線の交点ξ_1を求める.



∠β'βγの二等分線:

$$z-\beta=-\lambda_{11}\mu_{11}(\bar{z}-\bar{\beta})\quad \lambda_{11}=\frac{\gamma-\beta}{|\gamma-\beta|},$$
$$\mu_{11}=\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}$$

∠γ'γβの二等分線:

$$z-\gamma=-\lambda_{12}\mu_{12}(\bar{z}-\bar{\gamma})\quad \lambda_{12}=\frac{\alpha-\gamma}{|\alpha-\gamma|},\ \mu_{12}=\frac{\beta-\gamma}{|\beta-\gamma|}$$

二つの二等分線から$\bar{z}$を消去し, 交点ξ_1を求める.

$$\frac{z-\beta}{\lambda_{11}\mu_{11}}-\bar{\beta}=\frac{z-\gamma}{\lambda_{12}\mu_{12}}-\bar{\gamma}\quad\to\quad(\frac{1}{\lambda_{11}\mu_{11}}-\frac{1}{\lambda_2\mu_2})z$$
$$=\frac{\beta}{\lambda_{11}\mu_{11}}-\frac{\gamma}{\lambda_{12}\mu_{12}}+(\bar{\beta}-\bar{\gamma})\quad\to$$
$$(\lambda_{12}\mu_{12}-\lambda_{11}\mu_{11})z$$
$$=\lambda_{12}\mu_{12}\beta-\lambda_{11}\mu_{11}\gamma+\lambda_{11}\lambda_{12}\mu_{11}\mu_{12}(\bar{\beta}-\bar{\gamma})$$

$\lambda_{12}\mu_{12}-\lambda_{11}\mu_{11}=0$ を仮定すると$\dfrac{\gamma-\beta}{|\gamma-\beta|}\dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}=\dfrac{\alpha-\gamma}{|\alpha-\gamma|}\dfrac{\beta-\gamma}{|\beta-\gamma|}\quad\to\quad\dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}=-\dfrac{\alpha-\gamma}{|\alpha-\gamma|}$

になり, ベクトル$\overrightarrow{\alpha-\beta}$とベクトル$\overrightarrow{\alpha-\gamma}$が平行するので矛盾. 従って, $\lambda_{12}\mu_{12}\neq\lambda_{11}\mu_{11}$

$$z=\xi_1=\frac{\lambda_{12}\mu_{12}\beta-\lambda_{11}\mu_{11}\gamma+\lambda_{11}\lambda_{12}\mu_{11}\mu_{12}(\bar{\beta}-\bar{\gamma})}{\lambda_{12}\mu_{12}-\lambda_{11}\mu_{11}}\quad \lambda_{11}=\frac{\gamma-\beta}{|\gamma-\beta|},\ \mu_{11}=\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|},\ \lambda_{12}=\frac{\alpha-\gamma}{|\alpha-\gamma|},\ \mu_{12}=\frac{\beta-\gamma}{|\beta-\gamma|}$$

同様にξ_2，ξ_3を求めれば

$$\xi_2 = \frac{\lambda_{22}\mu_{22}\gamma - \lambda_{21}\mu_{21}\alpha + \lambda_{21}\lambda_{22}\mu_{21}\mu_{22}(\overline{\gamma} - \overline{\alpha})}{\lambda_{22}\mu_{22} - \lambda_{21}\mu_{21}} \quad \lambda_{21} = \frac{\alpha - \gamma}{|\alpha - \gamma|}, \mu_{21} = \frac{\beta - \gamma}{|\beta - \gamma|}, \lambda_{22} = \frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|}, \mu_{22} = \frac{\gamma - \alpha}{|\gamma - \alpha|}$$

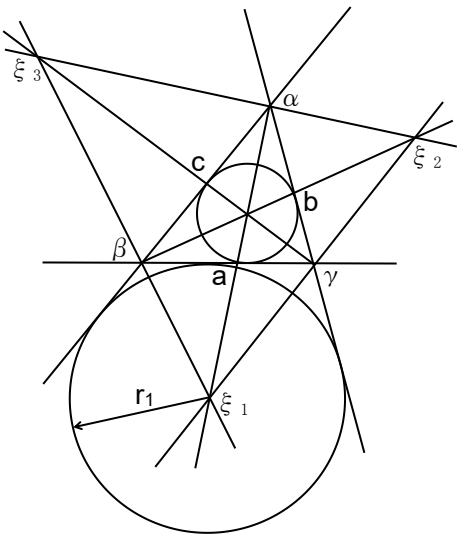
$$\xi_3 = \frac{\lambda_{32}\mu_{32}\alpha - \lambda_{31}\mu_{31}\beta + \lambda_{31}\lambda_{32}\mu_{31}\mu_{32}(\overline{\alpha} - \overline{\beta})}{\lambda_{32}\mu_{32} - \lambda_{31}\mu_{31}} \quad \lambda_{31} = \frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|}, \mu_{31} = \frac{\gamma - \alpha}{|\gamma - \alpha|}, \lambda_{32} = \frac{\gamma - \beta}{|\gamma - \beta|}, \mu_{32} = \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|}$$

次に傍接円の半径 r_1を求める.

$a = |\beta - \gamma|, b = |\gamma - \alpha|, c = |\alpha - \beta|$ とする.

△αβγの面積 S は

$$S = \Delta\beta\xi_1\alpha + \Delta\gamma\xi_1\alpha - \Delta\beta\xi_1\gamma = \frac{1}{2}r_1(b + c - a)$$



従って

$$r_1 = \frac{2S}{b + c - a} = \frac{|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta + \overline{\beta}\gamma + \overline{\gamma}\alpha)|}{|\gamma - \alpha| + |\alpha - \beta| - |\beta - \gamma|}$$ 同様に,

$$r_2 = \frac{2S}{c + a - b} = \frac{|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta + \overline{\beta}\gamma + \overline{\gamma}\alpha)|}{|\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| - |\gamma - \alpha|},$$

$$r_3 = \frac{2S}{a + b - c} = \frac{|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta + \overline{\beta}\gamma + \overline{\gamma}\alpha)|}{|\beta - \gamma| + |\gamma - \alpha| - |\alpha - \beta|}$$

オイラー線

三角形の外心，垂心，重心の座標をζ，η，δとする．3 頂点の座標をα，β，γとすれば，

$$\delta = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}, \eta = \alpha+\beta+\gamma-2\zeta \text{ より}$$

$$\delta = \frac{2\zeta+\eta}{3}$$

上式は，畢竟，外心と垂心を結ぶ線分を 1 対 2 に分ける点が重心であることを表している．三角形の外心，重心，垂心は直線上に並び，この線をオイラー線という．

内接円と傍接円の半径の関係

三角形の面積をSとし，内接円の半径をr，傍接円の半径をr_1，r_2，r_3とすると次の関係が成り立つ．

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

$$S = \sqrt{rr_1r_2r_3}$$

内接円と傍接円の半径の公式から簡単に証明することができる．

用語

複素数	complex number	三角形	triangle	五心	five centroids	円	circle
実数部	real part	頂点	vertex	重心	centroid	中心	center
虚数部	imaginary part	辺	side	内心	incenter	半径	radius
絶対値	absolute value	角	angle	外心	circumcenter	内接円	incircle
偏角	argument	面積	area	垂心	orthocenter	外接円	circumcircle
				傍心	excenter	傍接円	escribed circle

参考文献

- 複素数の幾何学　片山 孝次著　岩波書店
- 幾何への誘い　小平 邦彦著　岩波現代文庫
- 初等幾何のたのしみ　清宮 敏雄著　日本評論社
- Complex numbers & Geometry　Liang-shin Hahn　MAA Spectrum(The Mathematical Association of America)
- オブジェクト指向 JavaScript　Stoyan Stefanov 著　水野 貴明, 渋川 よしき訳　ASCII
- 開眼！JavaScript　Cody Lindley 著　和田 祐一郎訳　オライリー・ジャパン
- HTML5 Canvas　Steve Fulton, Jeff Fulton 著　安藤 慶一郎訳　オライリー・ジャパン

尚，本稿に関するご意見は，小林 征二（seiji@koba.sakura.ne.jp ）宛お願いいたします．