御神籤を揃えるための計算

問題： n 種類の御神籤を m 回一枚ずつ引いて，m 回目に一通り揃う確率と m 回目にすでに揃っている確率を求めよ．(但し，$n \le m$)　　また，一通り揃えるためには何回引けばよさそうか？御神籤は各種類とも同じ割合で存在し，その割合は引くことにより変化しないものとする．

解 1：

m 回目に n 種類の御神籤が揃う場合の数を $U(m,n)$，m 回目に n 種類がすでに揃っている場合の数を $V(m,n)$ とする．X を，御神籤 n 種類を揃えるために引く回数とし，m 回目に n 種類の御神籤が揃う確率を $P(X=m)$ とする．　$P(X=m)=\dfrac{U(m,n)}{n^m}$

m 回目に揃うためには，$(m-1)$ 回目に $(n-1)$ 種類が揃っており，m 回目に不足しているものを引けばよい．n 種類から $(n-1)$ 種類を選ぶ数は，$\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix}$ である．従って，m 回目に揃う場合の数 $U(m,n)$ は，

$$U(m,n)=\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} V(m-1,n-1)=nV(m-1,n-1) \quad (m,n\ge 2)$$

m 回目に n 種類が揃っているためには，$(m-1)$ 回目に n 種類が揃っているか，m 回目に n 種類が揃うか，の何れかである．前者の場合，m 回目に引く御神籤は n 種類のうちの何れでもよい．後者の場合，手元に不足している御神籤を引かなければならない．n 種類が不足し得るので n 通りの場合がある．

従って，

$$V(m,n)=n\times V(m-1,n)+U(m,n)=n\times V(m-1,n-1)+n\times V(m-1,n) \quad (m\ge n)$$
$$V(m,n)=0 \quad (m<n)$$
$$V(m,1)=1 \quad (m=1,2,3,\cdots)$$

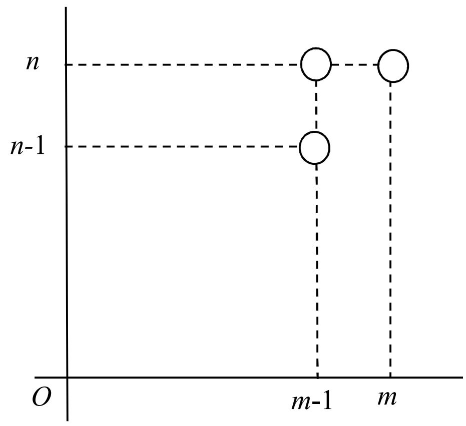
なる差分方程式が成り立つ．

V と U の関係式を代入して U について整理すると，

$$U(m,n)=n\times U(m-1,n-1)+(n-1)\times U(m-1,n) \quad (m\ge n)$$
$$U(m,n)=0 \quad (m<n)$$
$$U(1,1)=1, \quad U(m,1)=0 \quad (m=2,3,\cdots)$$

なる差分方程式を得る．

何れの方程式とも座標 (m,n) に相当する値を定めるために座標 $(m-1,n-1)$ および $(m-1,n)$ の値を使用している．



$G_n(x)=\sum_{m=1}^{\infty}U(m,n)x^m$ なる母関数を定義する.

$$\sum_{m=1}^{\infty}U(m,n)x^m=\sum_{m=1}^{\infty}n\times U(m-1,n-1)x^m+\sum_{m=1}^{\infty}(n-1)\times U(m-1,n)x^m$$

$$G_n(x)=nx\sum_{m=1}^{\infty}U(m-1,n-1)x^{m-1}+(n-1)x\sum_{m=1}^{\infty}U(m-1,n)x^{m-1}$$

$$G_n(x)=nxG_{n-1}(x)+(n-1)xG_n(x),\quad G_1(x)=\sum_{m=1}^{\infty}U(m,1)x^m=x$$

$$G_n(x)=\frac{nx}{1-(n-1)x}G_{n-1}(x)=\frac{nx}{1-(n-1)x}\times\frac{(n-1)x}{1-(n-2)x}\times\cdots\times\frac{2x}{1-x}\times G_1(x)$$
$$=\frac{n!\times x^n}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-(n-1)x)}$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-(n-1)x)}=\sum_{r=1}^{n-1}\frac{\alpha_r}{1-rx}\qquad(1\le r\le n-1)$$ と置くと,

$$\alpha_r=\frac{1}{(1-\frac{1}{r})(1-\frac{2}{r})\cdots(1-\frac{r-1}{r})(1-\frac{r+1}{r})\cdots(1-\frac{n-1}{r})}$$
$$=\frac{r^{n-2}}{(r-1)(r-2)\cdots(r-(r-1))(r-(r+1))\cdots(r-(n-1))}$$
$$=(-1)^{n-r-1}\frac{r^{n-2}}{(r-1)(r-2)\cdots1\times1\times2\times\cdots\times(n-r-1)}$$
$$=(-1)^{n-r-1}\frac{r^{n-2}}{(r-1)!\times(n-r-1)!}\qquad(1\le r\le n-1)$$

$G_n(x)$ の x^m の係数が解 $U(m,n)$ であり, これを $\left[x^m\right]G_n(x)$ と表すことにする.

$$\left[x^m\right]G_n(x)=\left[x^m\right]\frac{n!\times x^n}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-(n-1)x)}=n!\left[x^{m-n}\right]\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-(n-1)x)}$$
$$=n!\left[x^{m-n}\right]\sum_{r=1}^{n-1}\frac{\alpha_r}{1-rx}=n!\sum_{r=1}^{n-1}\alpha_r\left[x^{m-n}\right]\frac{1}{1-rx}=n!\sum_{r=1}^{n-1}\alpha_r r^{m-n}\qquad(n\ge1)$$
$$=n!\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{n-r-1}\frac{r^{n-2}}{(r-1)!\times(n-r-1)!}\times r^{m-n}=n!\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{n-r-1}\frac{r^{m-2}}{(r-1)!\times(n-r-1)!}$$
$$=\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{n-r-1}\frac{n!}{r!\times(n-r)!}\times(n-r)\times r^{m-1}=\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{n-r-1}\binom{n}{r}\times(n-r)\times r^{m-1}$$

一一般に,

$$A=\sum_{r=1}^{n-1}a_r=\sum_{r=1}^{n-1}a_{n-r}$$

従って,

$$U(m,n)=\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{n-r-1}\binom{n}{r}\times(n-r)\times r^{m-1}=\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{n-(n-r)-1}\binom{n}{n-r}\times(n-(n-r))\times(n-r)^{m-1}$$
$$=\sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\times r\times(n-r)^{m-1}$$

従って,

$$V(m,n)=\frac{U(m+1,n+1)}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{r-1}\binom{n+1}{r}\times r\times(n-r+1)^{m}$$
$$=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\times r\times(n-r+1)^{m-1}$$

m回目に一通り揃う確率とm回目にすでに揃っている確率をそれぞれ$P(X=m),Q(X=m)$とすれば,

$$P(X=m)=\frac{U(m,n)}{n^m}=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{n-r}{n}\right)^{m-1}$$

$$Q(X=m)=\frac{V(m,n)}{n^m}=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{n-r+1}{n}\right)^{m-1}$$

ここで, $\sum_{m=n}^{\infty}P(X=m)=P(X\geq n)=1$ であることを検証する.

$$\sum_{m=n}^{\infty}P(X=m)=\sum_{m=n}^{\infty}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{n-r}{n}\right)^{m-1}=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\left(\frac{r}{n}\right)\sum_{m=n}^{\infty}\left(\frac{n-r}{n}\right)^{m-1}$$
$$=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{n}{r}\right)\left(\frac{n-r}{n}\right)^{n-1}=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\left(\frac{n-r}{n}\right)^{n-1}=P(X\geq n)$$

n種類の御神籤を$(n-1)$回目引くと, 1 種類から$(n-1)$種類まで不足することが起こり得る. これは, 御神籤の引き方の総数n^{n-1}に等しいので,

$$\binom{n}{1}(n-1)^{n-1}-\binom{n}{2}(n-2)^{n-1}+\cdots+(-1)^{r-1}\binom{n}{r}(n-r)^{n-1}+\cdots+(-1)^{n}\binom{n}{n-1}(1)^{n-1}\equiv n^{n-1}$$

という恒等式が成立する. 両辺をn^{n-1}で割れば, 左辺は$P(X\geq n)$と一致し,

$$P(X\geq n)=1$$

を得る.

X の期待値を $E(X)$ とすれば,

$$E(X)=\sum_{m=n}^{\infty} m\times P(X=m)=\sum_{m=n}^{\infty} m\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{n-r}{n}\right)^{m-1}$$

$$=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\left(\frac{r}{n}\right)\sum_{m=n}^{\infty} m\times\left(\frac{n-r}{n}\right)^{m-1}$$

$$=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{n}{r}\right)\left(\frac{n-r}{n}\right)^{n-1}\left(n-1+\frac{n}{r}\right)$$

$$=(n-1)\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\left(\frac{n-r}{n}\right)^{n-1}+\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\left(\frac{n}{r}\right)\left(\frac{n-r}{n}\right)^{n-1}$$

$$=n-1+\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\left(\frac{n}{r}\right)\left(\frac{n-r}{n}\right)^{n-1}$$

御神籤の種類 n と一通り揃えるために引く回数の期待値 $E(X)$ を示す.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
$E(X)$	3	5.5	8.3	11.4	14.7	18.2	21.7	25.5	29.3	518.7

	n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X=m)	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0313	0.0156	0.00781	0.00391	0.00195
	3	0	0	0.222	0.222	0.173	0.123	0.0850	0.0576	0.0387	0.0259
	4	0	0	0	0.0938	0.141	0.146	0.132	0.110	0.0884	0.0692
	5	0	0	0	0	0.0384	0.0768	0.0998	0.108	0.105	0.0955
	6	0	0	0	0	0	0.0154	0.0386	0.0600	0.0750	0.0828
	7	0	0	0	0	0	0	0.00612	0.0184	0.0332	0.0472
	8	0	0	0	0	0	0	0	0.00240	0.00841	0.0173
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.000937	0.00375
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.000363
Q(X=m)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	0	0.5	0.75	0.875	0.9375	0.96875	0.984	0.992	0.996	0.998
	3	0	0	0.222	0.444	0.617	0.741	0.826	0.883	0.922	0.948

	4	0	0	0	0.0938	0.234	0.381	0.513	0.623	0.711	0.781
	5	0	0	0	0	0.0384	0.115	0.215	0.323	0.427	0.523
	6	0	0	0	0	0	0.0154	0.0540	0.114	0.189	0.272
	7	0	0	0	0	0	0	0.00612	0.0245	0.0577	0.105
	8	0	0	0	0	0	0	0	0.00240	0.0108	0.0282
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.000937	0.00468
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.000363

解 2：

X を，御神籤 n 種類を揃えるために引く回数とし，m 回目に n 種類の御神籤が揃う確率を $P(X=m)$ とする．m 回目の引きで n 種類の御神籤が揃うためには，$(m-1)$ 回目に 1 種類の御神籤が不足していなければならない．n 種類の御神籤をそれぞれ $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ とし，$(m-1)$ 回目に a_1 が不足している事象を A_1，a_2 が不足している事象を A_2，a_3 が不足している事象を A_3，…，a_n が不足している事象を A_n とする．$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ は，$(m-1)$ 回引いて，1 種類以上の御神籤が不足している確率を表す．$(m-1)$ 回引いて，1 種類以上が不足していると，n 種類が揃うのは m 回目以降になるので，

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(X \geq m)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} S_r$$

$$S_1 = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

$$S_2 = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + \cdots + P(A_{n-1} \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j)$$

$$\vdots$$

$$S_r = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_r \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}) \quad (1 \leq r \leq n)$$

$$\vdots$$

$$S_n = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

ここで，S_r は，$(m-1)$ 回御神籤を引いて r 種類を引かない（r 種類以外を引く）確率を表すので，

$$S_r = \binom{n}{r} \left(\frac{n-r}{n} \right)^{m-1} \quad (r = 1,2.3,\cdots n)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(X \geq m) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \left(\frac{n-r}{n} \right)^{m-1}$$

$$P(X = m) = P(X \geq m) - P(X \geq m+1) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \left(\frac{n-r}{n} \right)^{m-1} - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \left(\frac{n-r}{n} \right)^{m}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \left(\frac{r}{n} \right) \left(\frac{n-r}{n} \right)^{m-1}$$

定義より

$$Q(X = m) = \sum_{k=n}^{m} P(X = k) = \sum_{k=n}^{m} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \left(\frac{r}{n} \right) \left(\frac{n-r}{n} \right)^{k-1} = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \left(\frac{r}{n} \right) \sum_{k=n}^{m} \left(\frac{n-r}{n} \right)^{k-1}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \left[\left(\frac{n-r}{n} \right)^{n-1} - \left(\frac{n-r}{n} \right)^{m} \right] = 1 - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \left(\frac{n-r}{n} \right)^{m}$$

この値は，解 1 で求めた $Q(X = m)$ と一致する筈だが証明できていない．