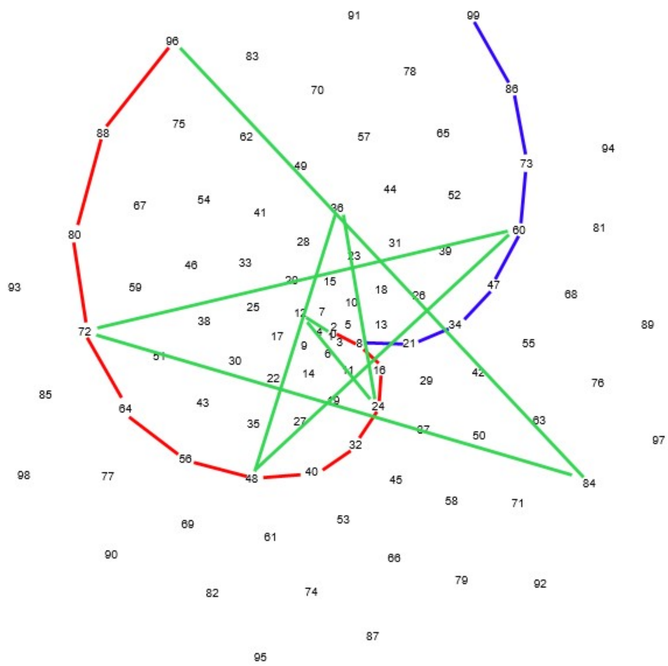
黄金比，フィボナッチ数，渦の関係

時計と反対方向に回転しながら中心から外側に向けて移動する針があり，この針は黄金角（2π/Φ，Φ=(1+√5)/2）だけ回転するつど点を記すとする．このようにすると点群が作成され，その中にはいくつかの渦を見つけることができる．記す点を 100 個として記す順に 0 から番号を付すことにする．0,8,16,24,32,40,48,56,64,72,80,88,96 のように 8 置きに点を結ぶと右巻きの渦（赤い線）ができ，8,21,34,47,60,73,86,99 のように 13 置きに点を結ぶと左巻きの渦(青い線）ができる．0,12,24,36,48,60,72,84,96 のように 12 置きに点を結ぶと渦とは程遠い折れ線(緑の線）になる．



線を結ぶ点と点の間隔をフィボナッチ数にすれば渦ができる．確かに 8 はフィボナッチ数列の第 5 項であり，13 は第 6 項である．12 はフィボナッチ数ではない．

n	点と点の間隔 f_n ＝渦の本数	渦の向き
1	1	右
2	2	左
3	3	右
4	5	左
5	8	右
6	13	左
7	21	右

点と点の間隔と渦の向きの関係は右表のようになる．また，点と点の間隔をあるフィボナッチ数，例えば 8 にすると 0 から 8 つ置きに始まる渦，1 から 8 つ置きに始まる渦，・・・，7 から 8 つ置きに始まる渦というように渦の本数は 8 になり，点と点の間隔のフィボナッチ数と等しくなる．

点を複素平面上の極形式で表すことにする．点の総数を N とし，k 番目の点を p_k で表すことにすると

$$p_k = \frac{k}{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{2\pi}{\Phi})k}, \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, k = 0,1,2,\ldots$$

f_n をフィボナッチ数列の n 項とする．

原点から間隔を f_n で離れていく点列は次式で表すことができる．

$$p_{mf_n} = \frac{mf_n}{N} e^{i(\frac{2\pi}{\Phi})mf_n}, mf_n < N, (m = 0,1,2,\ldots)$$

黄金比，フィボナッチ数，渦の関係

ここで点 p_k の偏角を $arc(p_k)$で表すことにすると，

$ark(p_k)=(\frac{2\pi}{\Phi})k=2\pi(\frac{k}{\Phi}-\left\lfloor\frac{k}{\Phi}\right\rfloor)$，ここで $\lfloor\ \rfloor$ はガウス記号を表わす．原点の周りを何回転かして P_k の位置が定まったする．偏角として必要な値は回転数の整数部分を除いた小数部分のみである．

$$ark(p_{mf_n})=(\frac{2\pi}{\Phi})mf_n=2\pi m(\frac{f_n}{\Phi}-\left\lfloor\frac{f_n}{\Phi}\right\rfloor)=2\pi m(f_n(\Phi-1)-\lfloor f_n(\Phi-1)\rfloor)=2\pi m(f_n\Phi-\lfloor f_n\Phi\rfloor)$$

$f_n\Phi-\lfloor f_n\Phi\rfloor$ は，原点から間隔 f_n で点が離れていくときの間隔ごとの回転数(小数点以下）を表す．この値が 0.5(半回転）より小さい時に渦は左巻きになり，0.5 より大きい時に右巻きになる．

n	f_n	$f_n\Phi$	$[f_n\Phi]$	$f_n\Phi-[f_n\Phi]$	$f_{n+1}-[f_n\Phi]$	渦の巻き方
1	1	1.6180	1	0.6180	1	右
2	2	3.2361	3	0.2361	0	左
3	3	4.8541	4	0.8541	1	右
4	5	8.0902	8	0.0902	0	左
5	8	12.9443	12	0.9443	1	右
6	13	21.0344	21	0.0344	0	左
7	21	33.9787	33	0.9787	1	右
8	34	55.0132	55	0.0132	0	左
9	55	88.9919	88	0.9919	1	右
10	89	144.0050	144	0.0050	0	左

$f_n\Phi$は，振動しながら n が大きくなるにつれ f_{n+1} に近づく．n が偶数なら $f_{n+1}<f_n\Phi$であり，$f_n\Phi$の方が小数部だけ大きくなる．従って，$f_{n+1}=[f_n\Phi]$，同様に，n が奇数なら $f_{n+1}>f_n\Phi$であり，$f_n\Phi$の方が 1 から小数部を引いただけ小さくなる．従って，$f_{n+1}=[f_n\Phi]+1$
n が大きくなるほど回転角が 0 に近づくので渦は直線になっていく．

回転しながら中心から外側に移動し黄金角のつど点を記し点群を作成したときに点群の中に潜んでいる渦の種類（本数と巻き方）とフィボナッチ数の関係を知ることができた．

黄金比，フィボナッチ数，渦の関係

【付記】

前頁の内容を検討する過程でフィボナッチ数 f_n と黄金比Φに関する特長的な関係式に気づいたのでメモしておく．何れも数学的帰納法を用いて証明できる．

１．
$$f_{2m} = f_{m-1}^2 + f_m^2$$
$$f_{2m+1} = f_{m-1}f_m + f_m f_{m+1}, m = 1,2,3,\cdots$$

２．
$$f_{2m}f_{2m+1} - f_{2m-1}f_{2m+2} = 1$$
$$f_{2m-1}f_{2m} - f_{2m-2}f_{2m+1} = -1, m = 1,2,3,\cdots$$

3.
$$\Phi^n = f_{n-1}\Phi + f_{n-2}, n = 2,3,4,\cdots$$
$$\Phi^{-n} = (-1)^{n-1} f_{n-1}\Phi + (-1)^n f_n, n = 1,2,3,\cdots$$