

分割数について

自然数 n をある規則にもとづいて分割するときの場合の数（分割の仕方が何通りあるか）を分割数と言い、それを $P(n)$ で表すことにします。例えば、2 は、2, 1+1 の二通りに分割できるので、 $P(2) = 2$ です。

$$5 = 5$$

$$4+1$$

$$3+2$$

$$3+1+1$$

$$2+2+1$$

$$2+1+1+1$$

$$1+1+1+1+1$$

の 7 通りゆえ、 $P(5) = 7$ です。

一般に、

$$P(n) = P(n, 1) + P(n, 2) + P(n, 3) + \cdots + P(n, k) + \cdots + P(n, n) \cdots (1)$$

が成り立ちます。ここで、 $P(n, k)$ とは、 n を k 分割するときの場合の数です。例えば、5 を 3 個に分割する仕方 $P(5, 3)$ は 2 通り、また、 $P(5, 1) = P(5, 4) = P(5, 5) = 1$ です。

$$P(n, k) = P(n-k, 1) + P(n-k, 2) + \cdots + P(n-k, k) \cdots (2)$$

が成り立ちます。 $n > k$ のとき、 n から k に 1 ずつ与えると、 $n-k$ 残ります。ここで、 $P(n, k)$ は、 $n-k$ を 1 分割、2 分割、 \cdots 、 k 分割する合計と等しくなります。

(1)、(2)の漸化式を使用して、 $P(n)$ を求めることができます。

自然数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100	1000
分割数	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	627	204226	190569292	2.41E+31