条件付き分割数の計算

自然数 n を特定の数個の数を用いて分割する方法が何通りあるかを調べます．ここで n を被分割数，数個の数を分割基底数と呼ぶことにします．例えば，被分割数 10 を分割基底数 3 と 8 を用いて分割する方法は 0 通りです．10 を 3 と 7 を用いて分割する方法は 1 通りです．10 を 2 と 8 を用いて分割する方法は，2+2+2+2+2 と 2+8 の 2 通りです．
10 を 1,2,3 を用いて分割する方法は，
3+3+3+1
3+3+2+2
3+3+2+1+1
3+2+2+2+1
2+2+2+2+2
3+3+1+1+1+1
3+2+2+1+1+1
2+2+2+2+1+1
3+2+1+1+1+1+1
2+2+2+1+1+1+1
3+1+1+1+1+1+1+1
2+2+1+1+1+1+1+1
2+1+1+1+1+1+1+1+1
1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
の 14 通りあります．

8 番目の分割数の問題は，自然数 n を被分割数とし，n を含む n より小さなすべての数を分割基底数とした場合，分割する方法が何通りあるかという問題です．
「100 円玉を 50 円玉，10 円玉，5 円玉，1 円玉を用いて両替する方法は何通りあるか？」という問題は，被分割数 100 を，分割基底数 50,10,5,1 を用いて分割する方法は何通りあるかという問題に置き換えることができ，答えは 158 通りです．
「10,000 円札を 5,000 円札，1,000 円札，500 円玉，100 円玉，50 円玉，10 円玉，5 円玉，1 円玉で両替する方法は」何と 18,155,171,408 通りあります．

被分割数 n を分割基底数 $b_1,b_2,b_3,\cdots,b_k$ を用いて分割することにします．ここで，$b_1,b_2,b_3,\cdots,b_k$ は，$1\leqq b_1<b_2<b_3<\cdots<b_k\leqq n$ なる整数です．答えを求めることは，下式の右辺の x^n の係数 A_{kn} を求めることです．

$$\frac{1}{(1-x^{b_1})(1-x^{b_2})(1-x^{b_3})\dots(1-x^{b_k})}=\sum_{i=0}^{\infty}A_{ki}x^i$$

条件付き分割数の計算

$$\frac{1}{(1-x^{b_1})}=\sum_{i=0}^{\infty}A_{1i}x^i$$

$$\frac{1}{(1-x^{b_1})(1-x^{b_2})}=\sum_{i=0}^{\infty}A_{2i}x^i$$

$$\frac{1}{(1-x^{b_1})(1-x^{b_2})(1-x^{b_3})}=\sum_{i=0}^{\infty}A_{3i}x^i$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{(1-x^{b_1})(1-x^{b_2})(1-x^{b_3})\ldots(1-x^{b_k})}=\sum_{i=0}^{\infty}A_{ki}x^i$$

と置くと，

$$\sum_{i=0}^{\infty}A_{1i}x^i=(1-x^{b_2})\sum_{i=0}^{\infty}A_{2i}x^i=\sum_{i=0}^{\infty}A_{2i}x^i-\sum_{i=0}^{\infty}A_{2i}x^{i+b_2}=\sum_{i=0}^{\infty}A_{2i}x^i-\sum_{i=0}^{\infty}A_{2i-b_2}x^i=$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}(A_{2i}-A_{2i-b_2})x^i$$

従って，$A_{1i}=A_{2i}-A_{2i-b_2}\rightarrow A_{2i}=A_{1i}+A_{2i-b_2}$　（但し，2i - b_2<0 のとき$A_{2i-b_2}=0$）

同様に，

$$A_{3i}=A_{2i}+A_{3i-b_3}$$

$$\vdots$$

$$A_{ki}=A_{(k-1)i}+A_{ki-b_k}$$

という漸化式が得られます．A_{1i}は，

$$\frac{1}{1-x^{b_1}}=1+x^{b_1}+x^{2b_1}+x^{3b_1}+\cdot\cdot\cdot$$

から求めることができるので，A_{2i}，A_{3i}，・・・，A_{ki}と順に求めることができます．

ここで，$A_{10}=A_{20}=A_{30}=\cdot\cdot\cdot=A_{k0}=1$，$A_{1i}=A_{2i}=A_{3i}=\cdot\cdot\cdot A_{ki}=0$(ji<0，j=1,2,3,⋯)

n	A_{1i}	A_{2i}	A_{3i}	…	A_{ki}
0	1	1	1	…	1
1	0				
2	.				
3	b_1 .				
4	.				
.	1	b_2			
.					
.	b_1	+	b_3		
	1		+		